Théorème

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan, on a :

- $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est réel $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est imaginaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Module d'un nombre complexe

On munit le plan complexe du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit M d'affixe $z = x+iy$.

Le module de z est le réel positif noté $|z|$ définie par

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Remarquons que $M(x,y)$ et par suite $OM = \sqrt{x^2+y^2}$

et donc on en déduit que $|z| = OM$.

Pour tous points A et B du plan on a :

$$AB = |z_B - z_A|$$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' on a :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $z \neq 0$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $z' \neq 0$
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $|z|^2 = z.\bar{z}$ et $|z| = 1 \Leftrightarrow z.\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Argument d'un nombre complexe

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit M d'affixe $z = x+iy$, non nul et soit θ une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

Posons $r = OM$ (donc $r = |z|$). On a $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, il en découle que

$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

- θ s'appelle l'argument de z.
- $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est l'écriture trigonométrique de z

TuniSchool.tn